

## 1. Übung zur Elementaren Stochastik

Prof. Dr. Ehrhard Behrends, WS 2009/10

Ausgabe: 13. 10. 2009

Abgabe: am 20. 10. 2009 bis 16.00 Uhr in den Fächern der Tutoren

**1.** Wir untersuchen einen Erzeuger von Pseudozufallszahlen (vgl. Skript, Seite 8). Gegeben sind also  $a_0, a_1$  und  $m, n_0$ , und für  $k \in \mathbb{N}_0$  wird  $n_{k+1}$  rekursiv durch

$$n_{k+1} := (n_k a_0 + a_1) \bmod m$$

definiert. Man beweise, dass die Folge  $(n_k)$  schließlich periodisch wird: Es gibt  $k_0, l \in \mathbb{N}$ , so dass  $n_{k+l} = n_k$  für alle  $k \geq k_0$ .

Finden Sie auch eine obere Schranke für  $l$ .

In den folgenden Aufgaben geht es um das wichtige Thema „ $\sigma$ -Algebren“.

**2.** Beweise oder widerlege:

- a) Sind  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$   $\sigma$ -Algebren auf einer Menge  $\Omega$ , so auch  $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ .
- b) Sind  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$   $\sigma$ -Algebren auf einer Menge  $\Omega$ , so auch  $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ .
- c) Sind  $\mathcal{E}_1$  und  $\mathcal{E}_2$   $\sigma$ -Algebren auf einer Menge  $\Omega$ , so auch

$$\{E_1 \cap E_2 \mid E_1 \in \mathcal{E}_1, E_2 \in \mathcal{E}_2\}.$$

**3.** Es sei  $\mathcal{E}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbb{R}^2$ , die alle offenen Kreisscheiben enthält. Dann enthält sie auch alle offenen Rechtecke.

**4.** Bestimmen Sie alle  $\sigma$ -Algebren auf einer 3-elementigen Menge.

**Für den mathematischen „Arbeitsspeicher“ . . .**

*Auf die folgenden Fragen sollte man jederzeit eine richtige Antwort geben können.*

Was ist eine  $\sigma$ -Algebra? Wie ist die  $\sigma$ -Algebra der Borelmengen definiert? Was ist ein Wahrscheinlichkeitsraum?